

TEMA 3 – ÁLGEBRA

Operaciones con polinomios

EJERCICIO 1 : Dados los polinomios $P(x) = 4x^3 - 7x^2 - 6x + 14$, $Q(x) = 2x^3 + 3x + 5$. Calcular:

- a) $P(x) + Q(x)$ b) $P(x) - Q(x)$ c) $2P(x) - 3Q(x)$ d) $P(x) \cdot Q(x)$ e) $P(x) : Q(x)$

EJERCICIO 2 : Realiza los siguientes productos:

- a) $(x^3 - 4x^2 + 4) \cdot (2x - 3)$ b) $(x^3 + 2x^2 - 6x + 2) \cdot (x^2 + 3x - 2)$
 c) $(2x + 3)^2$ d) $(3x - 7) \cdot (3x + 7)$

EJERCICIO 3 : Halla el cociente y el resto de las siguientes divisiones y expresa el resultado en la forma

$$\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{d(x)}$$

- a) $(2x^2 - 6x + 8) : (x + 4)$ b) $(3x^3 + 15x^2 - 14x + 6) : (x^2 - 3x + 2)$
 c) $(4x^3 - 6x + x^4 + 12) : (x^2 + 2x - 3)$ d) $(x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7) : (2x + 3)$
 e) $(x^3 - 4x^2 + 5x - 6) : (x^2 - 7)$

EJERCICIO 4 : Mediante la regla de Ruffini, calcula el cociente y el resto de:

- a) $(2x^3 - 6x^2 + 5x - 8) : (x + 1)$ b) $(2x^3 + 5x^2 - 6) : (x + 2)$
 c) $(3x^3 + 15x - 10) : (x - 3)$ d) $(5x^3 + 2x^4 + 5x) : (x + 3)$

Factorización de polinomios

EJERCICIO 5 : Calcular las raíces de

- a) $x^3 + 6x^2 - x - 6$ b) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ c) $x^4 - 5x^2 + 4$ d) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$

EJERCICIO 6 : Descomponer en factores los polinomios:

- a) $x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24$ b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2$ c) $x^4 - 5x^2 + 4$
 d) $x^3 + 2x^2 + 4x$ e) $2x^3 + 11x^2 + 2x - 15$ f) $3x^4 - 3x^3 - 18x^2$
 g) $4x^2 + 12x + 9$ h) $25x^2 - 4$

EJERCICIO 7 : Hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

$P(x) = x^4 + 7x^3 + 12x^2$ $Q(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3$

Teorema del resto

EJERCICIO 8 : Hallar m para que $5x^3 - 12x^2 + 4x + m$ sea divisible por $x - 2$

EJERCICIO 9 : Calcular a para que el polinomio $x^3 + ax + 10$ sea divisible por $x + 5$

EJERCICIO 10 : Dado el polinomio $x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 5x + m$, determinar m para que al dividirlo por $x + 3$ se obtenga 100 como resto.

Fracciones algebraicas

EJERCICIO 11 : Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

- a) $\frac{x+3}{x^2-1} \cdot \frac{x-1}{x+2}$ b) $\frac{x^2+4x+4}{x^2-1} : \frac{x+2}{x+1}$ c) $\frac{x^3-3x+2}{x^3+x^2-2x}$ d) $\frac{x^2+2x-3}{x^3+2x^2-x-2}$
 e) $\frac{x^3-3x^2+4}{x^3+5x^2+8x+4}$ f) $\frac{x^3-7x^2+15x-9}{x^3-5x^2+3x+9}$ g) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x+3}$
 h) $\frac{x^2+10x+25}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x+5}$ i) $\frac{x^2-4}{x+6} : \frac{x^2-5x+6}{x^2-36}$ j) $\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x+1}\right) : \left(\frac{x^2+2}{x^2} + \frac{3}{x}\right)$

EJERCICIO 12 : Calcula y simplifica:

- a) $\frac{x}{x^2-4x+3} - \frac{3}{x^2-5x+6}$ b) $\frac{x}{x+1} + \frac{1+x}{x^2+2x+1}$ c) $\frac{x-1}{x^2-5x+6} + \frac{x-2}{x^2-4x+3}$

d) $\frac{x-3}{x^2+x+1} - \frac{3x^2}{x^3-1}$ e) $\frac{2}{x^2-2x+1} + \frac{x+1}{x^2-1}$ f) $\frac{1}{x^2-9x+20} - \frac{11}{x^2-11x+30}$
 g) $\frac{1-x}{x^2-4x+3} - \frac{1+2x}{x^2-6x+9} - \frac{x+1}{x^2-9}$ h) $\frac{1+2x}{x^2+3x+2} - \frac{1-x}{x^2+5x+6} - \frac{1+x}{x^2+4x+3}$

• **Resolución de ecuaciones**

EJERCICIO 13 : Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2}{2} - 4x = 3 + \frac{x^2-12}{4}$ b) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ c) $\frac{2x+1}{x+3} + \frac{x-3}{x} = \frac{1}{2}$
 d) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ e) $\sqrt{x+4} + \sqrt{2x-1} = 6$ f) $-x \cdot (x-1) \cdot (x^2-2) = 0$
 g) $\frac{2x^3 - x^2 - 2x + 25}{x^2-1} = 2x$ h) $2x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 36x = 0$ i) $\frac{x^2-16}{3} - x = \frac{2-3x}{3} - \frac{x^2}{3}$
 j) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$ k) $\sqrt{3x-3} + x = 7$ l) $\frac{2}{x-1} + \frac{x-2}{x+1} = \frac{5}{4}$
 m) $x + \sqrt{3x+10} = 6$ n) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ñ) $\sqrt{x^2+3x} = \sqrt{2x}$
 o) $\frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{1}{x}$ p) $\sqrt{2x+8} - \sqrt{x} = 2$ q) $\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{4}{x^2}$
 r) $3^{x+2} + 3^x = 90$ s) $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ t) $7^{x-1} - 2^x = 0$
 u) $4^x - 2^{x-1} - 14 = 0$ v) $\log(2x) - \log(x+1) = \log 4$ w) $3^x + \frac{1}{3^x} - \frac{1}{3} = \frac{79}{9}$
 x) $\log(3x-1) = \log 2 + \log(4x-6)$ y) $\frac{2^{4x-1}}{2^{3x+2}} = 16$ z) $2 \log x + \log 4 = -2$
 1) $2^{2x} - 2^{x+1} + \frac{3}{4} = 0$ 2) $\log(x-2) + \log(x-3) = \log 6$ 3) $\log(2x+3) - \log x = 1$

• **Sistemas de ecuaciones**

EJERCICIO 14 : Resuelve analíticamente los siguientes sistemas de ecuaciones e interpreta gráficamente la solución:

a) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases}$
 d) $\begin{cases} y=x^2+4x+2 \\ x+y+2=0 \end{cases}$ e) $\begin{cases} y=x^2+4x+2 \\ 4x-y+2=0 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y=x^2+4x+2 \\ x-y-2=0 \end{cases}$

EJERCICIO 15 : Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} 2x^2 - y = 4 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 3y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$
 d) $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^{x+1} - 3^{y-1} = 5 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2 \log x + \log y = 2 \\ \log xy = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + 2y = \frac{3}{x} \\ x + y = \frac{2}{y} \end{cases}$
 g) $\begin{cases} 5^x = 25 \cdot 5^y \\ \log(x+y) - \log(x-y) = \log 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 1 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x - 1 = y \\ \frac{x-1}{2} = y^2 - 1 \end{cases}$
 j) $\begin{cases} 4 \cdot 2^x = 4^{y+1} \\ \log(x+y) + \log(x-y) = \log 3 \end{cases}$ k) $\begin{cases} 2x + y = 52 \\ \sqrt{x} + y = 7 \end{cases}$ l) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 20 \\ 3x - y = 122 \end{cases}$

- **Método de Gauss para sistemas lineales**

EJERCICIO 16 : Resuelve, aplicando el método de Gauss, los siguientes sistemas lineales:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 5 \\ x + y + z = 3 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 2x + 5y + z = -3 \\ 4x + 9y + 3z = 2 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x - 3y + z = 3 \\ 4x + y - 5z = 13 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x + z = 4 \\ y + z = 3 \\ x + y = 5 \\ x - 2y - z = -2 \end{cases} \\
 \text{e) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x + y + 5z = 10 \\ x + y - 4z = -9 \end{cases} & \text{g) } \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases} & \text{h) } \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ 2x - y + z = 3 \\ x - y + 3z = 6 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

- **Inecuaciones con una incógnita**

EJERCICIO 17 : Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } -2x + 4 \leq -2 & \text{b) } x^2 + x - 6 \leq 0 & \text{c) } 2x + 1 > -5 \\
 \text{d) } -3x + 1 > -5 & \text{e) } x^2 - 4 \leq 0 & \text{f) } 2x - 3 < 5 \\
 \text{g) } 3x - 1 \leq 4x & \text{h) } x^2 - 3x > -2 & \text{i) } \frac{x-1}{3} \leq 2x+1 \\
 \text{j) } \frac{2(x-1)}{3} > x-1 & \text{k) } x^2 - 4 \geq 0 & \text{l) } 3(x-1)+1 \leq 2(x+1) \\
 \text{m) } 2 - 3x < 2(x+1) & \text{n) } -x^2 + 4x - 4 \leq 0 & \text{ñ) } \frac{x-2}{3-x} > 0 \\
 \text{o) } \frac{x+3}{x^2-x} > 0 & \text{p) } \frac{x^2+2}{x-3} \leq 0 & \text{q) } \frac{x^2+x-6}{x^2-2x+1} \geq 0 \\
 \text{r) } x^3 - 4x \geq 0 & \text{s) } x^3 + 3x^2 - x - 3 < 0 & \text{t) } 3x^2 - 6x > 0
 \end{array}$$

- **Sistemas de inecuaciones con una incógnita**

EJERCICIO 18 : Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} 3x + 8 \leq x + 14 \\ 2x > \frac{3}{2}x - 1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} x^2 - 3x - 4 > 0 \\ 2x - 3 < 0 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 2x - 3\left(\frac{x}{2} + 1\right) \geq x - 8 \\ x + \frac{x}{3} - \frac{1}{2} + 2 > 2x - \frac{5}{6} \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} 10 - 3x - x^2 < 0 \\ 3x + 5 > -16 \end{cases}
 \end{array}$$

- **Inecuaciones con dos incógnitas**

EJERCICIO 19 : Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } 2x - 3y < 6 & \text{b) } x + 2y \geq 0 & \text{c) } 3x - 2y \leq 0 & \text{d) } 4x + y > 3
 \end{array}$$

- **Sistemas de inecuaciones con dos incógnitas**

EJERCICIO 20 : Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } \begin{cases} 2x - y > 0 \\ x < 1 - y \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ x \geq -2y \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x - y > 0 \\ y > 0 \\ x + y + 1 > 0 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq -1 \\ x < y \end{cases}
 \end{array}$$

- **Problemas algebraicos**

EJERCICIO 21 : Un número de tres cifras es tal que la suma de sus cifras es 9. Si el orden de las cifras se invierte, el número disminuye en 99 unidades y la cifra de las decenas es el doble de la cifra de las unidades. Hallar dicho número.

EJERCICIO 22 : El área de un trapecio isósceles es 7 m^2 y su base menor mide 2,5 m. Calcular la base mayor y la altura, sabiendo que ésta es las dos terceras partes de la base mayor.

EJERCICIO 23 : Un número de dos cifras elevado al cuadrado se diferencia del cuadrado del número que resulta al intercambiar sus cifras en 297. La cifra de las unidades es la mitad de la de las decenas. Hallar el número.

EJERCICIO 24 : El área de un triángulo isósceles es 60 m^2 y cada uno de los lados iguales mide 13 m. Hallar la base y la altura del triángulo.

EJERCICIO 25 : Dos hermanos se diferencian en cuatro años de edad. Dentro de ocho años, las edades de ambos sumarán 40 años. ¿Cuáles son sus edades actuales?

EJERCICIO 26 : De un rectángulo sabemos que su área es 192 cm^2 y sus diagonales miden 20 cm. Calcula la longitud de sus lados.

EJERCICIO 27 : Por dos bolígrafos, un lápiz y un rotulador he pagado 6 euros. Por cuatro bolígrafos y dos rotuladores he pagado 10 euros. Y por cinco lápices y tres rotuladores he pagado 11 euros. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

EJERCICIO 28 : Halla cuatro números enteros consecutivos que sumen 366.

EJERCICIO 29 : Halla dos números sabiendo que suman 7 y sus inversos, $7/12$.

EJERCICIO 30 : Halla la medida de los lados de un rectángulo si sabemos que su perímetro es 20 cm y la diagonal $\sqrt{58}$ cm.

EJERCICIO 31 : Si aumentamos en 2 dm cada arista de un recipiente cúbico, su capacidad aumenta en 98 litros. Averigua la capacidad inicial del depósito.

EJERCICIO 32 : En un aula estudian 28 alumnos. De ellos, hay tantos alumnos con ojos verdes como alumnos con ojos azules, y el resto tiene ojos castaños. Si el número de alumnos con ojos castaños es igual que los alumnos que tienen ojos verdes y azules juntos. ¿cuántos alumnos hay con cada color de ojos?

EJERCICIO 33 : Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, siendo un total de 20 personas entre hombres, mujeres y niños. Contando a los hombres y las mujeres juntos, su número es el triple que el número de niños. Además, si hubiera ido una mujer más, su número igualaría al de los hombres. Calcula cuántos hombres, mujeres y niños han ido a la excursión.

EJERCICIO 34 : Ana se dispone a invertir 100.000 euros. En el banco le ofrecen dos productos: Fondo Tipo A, al 4 % de interés anual, y Fondo Riesgo B, al 6 % de interés anual. Invierte una parte en cada tipo de fondo y al cabo del año obtiene 4.500 euros de intereses. ¿Cuánto adquirió de cada producto?

EJERCICIO 35 : Los lados de un rectángulo se diferencian en 2 m. Si aumentáramos 2 m cada lado, el área se incrementaría en 40 m^2 . Halla las dimensiones del polígono.

EJERCICIO 36 : El alquiler de una tienda de campaña cuesta 90 euros al día. Inés está preparando una excursión con sus amigos y hace la siguiente reflexión “Si fuéramos tres amigos más, tendríamos que pagar 6 euros cada uno”. ¿Cuántos amigos van de excursión?

EJERCICIO 37 : Dos vacas y tres terneros valen lo mismo que dieciséis ovejas. Una vaca y cuatro ovejas valen igual que tres terneros. Tres terneros y ocho ovejas cuestan lo mismo que cuatro vacas. Averigua el precio de cada animal.

EJERCICIO 38 : En la actualidad la edad de un padre es el triple de la de su hijo, y dentro de 15 años la edad del padre será el doble de la de su hijo. ¿Cuántos años tienen en este momento el padre y el hijo?

EJERCICIO 39 : Si Juan sube de tres en tres los escalones de una torre, tiene que dar 30 pasos menos que si los sube de dos en dos. ¿Cuántos escalones tiene la torre?