

TEMA 7 – INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES.**Tasa de variación media. Cálculo y significado**

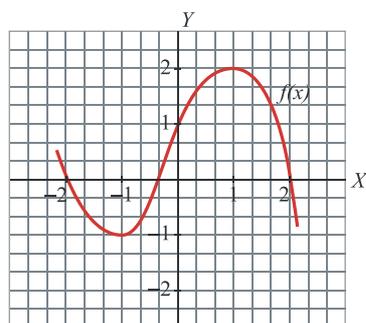
EJERCICIO 1 : Consideramos la función: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$. Halla la tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$ e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo.

EJERCICIO 2 :

a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en el intervalo $[-3, -1]$

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

EJERCICIO 3 : Calcula la tasa de variación media de esta función, $f(x)$, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos: a) $[-2, -1]$ b) $[0, 1]$

**Derivada de una función por la definición**

EJERCICIO 4 : Halla, utilizando la definición, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 2x$ b) $f(x) = x^2 + 1$ c) $f(x) = \frac{2x+1}{4}$ d) $f(x) = \frac{3}{x}$.

EJERCICIO 5 : Halla la derivada de la siguientes funciones, aplicando la definición de derivada, en los puntos que se indican

a) $f(x) = \frac{3x+1}{2}$ en $x = -1$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 2$ c) $f(x) = 3x^2 + 2x$ en $x = 1$ d) $f(x) = \frac{x^2}{3}$ en $x = 1$

Cálculo de derivadas

EJERCICIO 6 : Calcular las siguientes derivadas:

1) $y = 5$	12) $y = \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 8x$	20) $y = \frac{1}{x}$
2) $y = x$	13) $y = \frac{1}{x^2} + x^3 + 2x^{-1}$	21) $y = \frac{x^2 - x + 3}{5}$
3) $y = 3x$	14) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)$	22) $y = x^2 - \frac{1}{x^3} + \frac{3x}{1+x} + \frac{4-x}{x}$
4) $y = x^5$	15) $y = \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^3}$	23) $y = (x^3 + 1) \cdot (x + 2)$
5) $y = 3 \cdot x^6$	16) $y = \frac{x^3}{3} + x - \frac{1}{x}$	24) $y = (x^3 + 2) \cdot x^{-2}$
6) $y = \frac{3}{5} \cdot x^{10}$	17) $y = (x^2 - 1) \cdot (x^3 + 3x)$	25) $y = \frac{2}{x^3 + 2}$
7) $y = \frac{3x^2}{4}$	18) $y = (x^2 - 1) / (x^3 + 3x)$	26) $y = \frac{x^3 - 3}{5}$
8) $y = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 7$	19) $y = \frac{x^2 - 1}{x + 4}$	27) $y = \frac{2}{3x^2 + 1}$
9) $y = \frac{1}{x^4}$		
10) $y = 5 \cdot \left(\frac{1}{x^3} + x^{-2} \right)$		
11) $y = 6x^3 + 5x^2 - 1$		

- 28) $y = \frac{1}{1-3x^3}$
- 29) $y = \frac{x^2-2}{x^3+3x^2}$
- 30) $y = \frac{x^3}{x-3}$
- 31) $y = (3x^3-2x+7)^7$
- 32) $y = 3 \cdot (x^2-x+1)^3$
- 33) $y = (2x^4-4x^2-3)^5$
- 34) $y = (2x^3+x)^4$
- 35) $y = 5 \cdot (x^3-3x)^4$
- 36) $y = \frac{(x^4-5x)^2}{(x^3-3x)^5}$
- 37) $y = \frac{(x^3-2x)^3 \cdot (2x^4-x^2)^2}{(x^3-2x)^3}$
- 38) $y = \frac{(2x^4-x^2)^2}{(2x^4-x^2)^2}$
- 39) $y = \sqrt[3]{x}$
- 40) $y = \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}$
- 41) $y = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$
- 42) $y = \sqrt{\frac{x+2}{3}}$
- 43) $y = \sqrt[3]{x^2-1}$
- 44) $y = \sqrt[5]{x^3-7x}$
- 45) $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$
- 46) $y = 5x^3 + \sqrt[3]{x} + 1$
- 47) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$
- 48) $y = (x - \sqrt{1-x^2})^2$
- 49) $y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$
- 50) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$
- 51) $y = 5 \cdot (x^3-2x^2+x)^4$
- 52) $y = \frac{4-6x}{(2x^4-3)^6}$
- 53) $y = e^{\sqrt{x}}$
- 54) $y = \frac{1}{e^{2x}}$
- 55) $y = x^2 \cdot e^{3x}$
- 56) $y = \frac{x}{e^x}$
- 57) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- 58) $y = \frac{x^2-x}{e^x}$
- 59) $y = \log_3 x$
- 60) $y = \log_2 x^3$
- 61) $y = \log x$
- 62) $y = \text{Ln}(x^2-1)$
- 63) $y = \log_2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}$
- 64) $y = \text{Ln} \frac{e^{3x}}{\sqrt{x}}$
- 65) $y = \log \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$
- 66) $y = \frac{\text{Ln} x}{x^5}$
- 67) $y = \text{Ln}[x^3 \cdot (x+2)]$
- 68) $y = \text{Ln} \sqrt[3]{1+x^2}$
- 69) $y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
- 70) $y = \text{Ln} \frac{x^2+3}{2x-1}$
- 71) $y = (\log x + 1) \cdot \sqrt{x^2+1}$
- 72) $y = \text{tag } 2x$
- 73) $y = \text{sen } 2x$
- 74) $y = \text{sen } x^2$
- 75) $y = \text{sen}^2 x$
- 76) $y = \text{sen}^2 2x$
- 77) $y = \text{sen}^2 x^2$
- 78) $y = \text{sen}^5 2x^3$
- 79) $y = 5 \cdot \text{sen}^3 2x^4$
- 80) $y = e^{\cos x}$
- 81) $y = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$
- 82) $y = \frac{\sqrt{1+\text{sen } x}}{\sqrt{1-\text{sen } x}}$
- 83) $y = \text{tag}(x+3)^2$
- 84) $y = \text{tag}^2(x+3)$
- 85) $y = \text{Ln} \left(\cos \frac{x^2}{2} \right)$
- 86) $y = \text{tag}(1-2x)$
- 87) $y = \text{tag} \left(x + \frac{1}{x} \right)$
- 88) $y = \frac{\cos \text{ec} x}{\sec x}$
- 89) $y = \text{sen} \sqrt{x}$
- 90) $y = \text{sen}(x+e^x)$
- 91) $y = \text{Ln} \left[\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} \right]$
- 92) $y = \cos x \cdot (1-\cos x)$
- 93) $y = \frac{\text{sen } x + \cos x}{\text{sen } x - \cos x}$
- 94) $y = \text{Ln}(x^2 \cdot \text{sen} 2x)$
- 95) $y = \frac{x \cdot \text{sen}^2 x}{e^x - 1}$
- 96) $y = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$
- 97) $y = \frac{-\cos 2x}{2}$
- 98) $y = \text{Ln}(\text{tag } 2x)$
- 99) $y = \text{Ln}(\text{sen } x)$
- 100) $y = \text{sen}^3(x+1)$
- 101) $y = \sec^2 x$
- 102) $y = \sqrt{x} \text{sen} \sqrt{x} + \cos \sqrt{x}$
- 103) $y = \text{sen}[\cos(\text{tag } x)]$
- 104) $y = \text{Ln} \sqrt{\frac{\cos x}{\text{sen } x}}$
- 105) $y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$
- 106) $y = \text{Ln}(\text{tag}^2 \sqrt{x})$
- 107) $y = \text{Ln} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
- 108) $y = \text{Ln} \frac{(x-1)^2}{2x-3}$
- 109) $y = \text{Ln}(\text{sen}^2 x)$
- 110) $y = e^{\cos 2x}$
- 111) $y = \text{Ln}(\text{sen}^2 x \cdot \cos^3 x)$
- 112) $y = \text{sen}^2 x - \cos^2 x$
- 113) $y = \text{sen}(x+1)^3$

EJERCICIO 7 - Halla la función derivada de:

- a) $y = 3x^5 - 4x^3 + 3x + 7$
- b) $y = \frac{3x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{9x^2}{2} + 5x - 15$
- c) $y = \frac{x^2 - 3x + 7}{5}$
- d) $y = (3x^3 - 5x + 1) \cdot (x + x^2)$
- e) $y = \frac{2}{x^2 + 2x}$
- f) $y = \frac{x^3}{3x + 2}$
- g) $y = \left(\frac{3x-2}{7-9x} \right)^2$
- h) $y = \frac{(5-x)^2}{3x-1}$
- i) $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$
- j) $y = \sqrt{x^9} \cdot 4x^5$
- k) $y = \frac{2}{x^5} + \sqrt{3}$

$$\begin{array}{llll}
 \text{l) } y = \sqrt{12x} + e^{2x+1} + \log_2 3x & \text{m) } y = (3x - 1)^2 \cdot (1 - 4x) & \text{n) } y = \frac{x^5 \sqrt{x}}{x^{-3}(x^2)^5} & \text{ñ) } y = (3x^3 - 5x + 2)^4 \\
 \text{o) } y = (3x^2 - x)^4 & \text{p) } y = \sqrt{3x^2 - \sqrt{5x}} & \text{q) } y = \sqrt{1-x^2} & \text{r) } y = \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3 \\
 \text{s) } y = (2x - 4)^4 + 2 \cdot \sqrt{x^2 - 1} & \text{t) } y = \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} & \text{u) } y = \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{x} & \text{v) } y = \text{Ln}(x^2 + 2x) + e^{-x} \\
 \text{w) } y = \log_3 x + 3^x & \text{x) } y = 2 \cdot \text{sen}(3x+4) & \text{y) } y = 3\cos^3(3x) & \text{z) } y = \text{tag}(x^2+1) \\
 \text{1) } y = \sqrt[5]{x^3 - x} & \text{2) } y = x \cdot e^x & \text{3) } y = \frac{\text{Lnx}}{\text{senx}} & \text{4) } y = 4 \cdot (2x^3 - 1)^5 \\
 \text{5) } y = e^{\sqrt{x+3}} & \text{6) } y = \sqrt[3]{\text{Ln}(3x+5)} & \text{7) } y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & \text{8) } y = \text{tag} \sqrt{3x+2}
 \end{array}$$

Recta tangente

EJERCICIO 8 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

EJERCICIO 9 - Halla la ecuación de la recta de pendiente 7 que es tangente a la curva $y = 3x^2 + x - 1$.

EJERCICIO 10 - Halla los puntos de tangente horizontal de la siguiente función y, con ayuda de las ramas infinitas, decide si son máximos o mínimos: $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$

EJERCICIO 11 - Averigua los puntos de tangente horizontal de la función: $f(x) = \frac{3 - x^2}{x + 2}$

EJERCICIO 12 - Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3x - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$

EJERCICIO 13 - Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x - 4x^2$ que sea paralela a la recta $y = -7x + 3$

EJERCICIO 14 - Halla la ecuación de la recta de pendiente -4 que sea tangente a la curva $y = x^4 + 2$.

EJERCICIO 15 - Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^3 + x$ en el punto de abscisa $x = -1$

Crecimiento y extremos relativos

EJERCICIO 16 - Estudia la monotonía y calcula los extremos de la siguiente función: $f(x) = x^4 - 2x^2$

Representar funciones que cumplan unas condiciones

EJERCICIO 17 : Dibuja la gráfica de la función $f(x)$, sabiendo que:

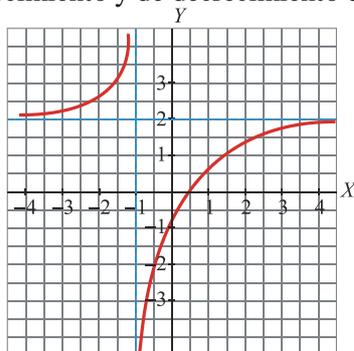
- Su derivada se anula en $(0, 0)$
- Solo corta a los ejes en $(0, 0)$
- Sus asíntotas son $x = -2$, $x = 2$ e $y = 0$
- La posición de la curva respecto a las asíntotas es: $\begin{cases} \text{Si } x \rightarrow -\infty, y < 0 \\ \text{Si } x \rightarrow +\infty, y < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

EJERCICIO 18 : Haz la gráfica de una función $f(x)$, sabiendo que :

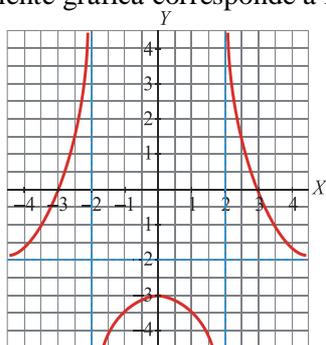
- Es continua.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- Su derivada se anula en $(-3, -2)$, en $(0, 2)$ y en $(2, -3)$.
- Corta a los ejes en los puntos $(-4, 0)$, $(-2, 0)$, $(1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, 2)$.

Dada una gráfica, estudiar propiedades

RCICIO 19 : A partir de la gráfica de $f(x)$, di cuáles son sus asíntotas, indica la posición de la curva respecto a ellas y halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función:



EJERCICIO 20 : La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x)$:



- a) ¿En qué puntos se anula la derivada?
- b) ¿Cuáles son sus asíntotas?
- c) Indica la posición de la curva respecto a sus asíntotas verticales.

Estudiar y representar funciones

EJERCICIO 21 : Estudia y representa las siguientes funciones:

- a) $f(x) = x^3 - 12x$
- b) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$
- c) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$
- d) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$
- e) $f(x) = \frac{3x}{x-3}$
- f) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$
- g) $f(x) = \frac{x^3-2}{x}$
- h) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$
- i) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-4}$
- j) $f(x) = \frac{2x^3}{x^2+2}$
- k) $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2-1}$
- l) $f(x) = \frac{x^4-2x^2+1}{x^2}$
- m) $f(x) = \frac{2x^5}{x^2+1}$

Recopilación

EJERCICIO 22 :

- a) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$
- b) ¿Es creciente o decreciente $f(x)$ en $x = 2$?

EJERCICIO 23 : Dada la función: $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$

- a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 1$?
- b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

EJERCICIO 24 :

- a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.
 b) Halla los tramos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 25 : Consideramos la función: $f(x) = 5x^2 - 3x$

- a) ¿Crece o decrece en $x = -1$? ¿Y en $x = 1$?
 b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 26 : Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones:

a) $f(x) = 8x - x^2$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{4}$

EJERCICIO 27 : Dada la siguiente función: $f(x) = 14x - 7x^2$

- a) ¿Es creciente o decreciente en $x = 0$? ¿Y en $x = 4$?
 b) Halla los tramos en los que la función es creciente y en los que es decreciente.

EJERCICIO 28 : Halla y representa gráficamente los puntos de tangente horizontal de la función:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$$

EJERCICIO 29 : Averigua los puntos de tangente horizontal de las siguiente función y represéntalos gráficamente:

$$f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$$

EJERCICIO 30 : Estudia y representa las siguientes funciones:

- | | | | |
|--|---------------------------------------|--|---|
| a) $f(x) = (x-1)^2(x+8)$ | b) $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ | c) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ | d) $f(x) = 4x^2 - 2x^4 + 2$ |
| e) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ | f) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ | g) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$ | h) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x}$ |
| i) $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x - 3}$ | j) $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2}$ | k) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ | l) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ |
| m) $f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$ | n) $f(x) = x(x-3)^2$ | ñ) $f(x) = x^4 - 8x^2$ | o) $f(x) = \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 4}$ |
| p) $f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$ | q) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$ | r) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x}$ | s) $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$ |